

问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page



Page 1 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



高等代数(线性代数)教学研讨

关于无限维向量空间上线性变换的特征值与特征向量问题

辛 林

福建师范大学数学与计算机科学学院

2009.5

问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page



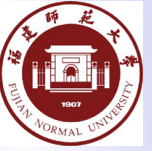
Page 2 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



问题提出

解决思路

例

问题再提出

 一 问题提出

 二 解决思路

 三 例子

 四 问题再提出

Home Page

Title Page



Page 3 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



问题提出

解决思路

例

问题再提出

1 问题提出

作为本科高等代数教学，重点放在有限维向量空间及其相关的线性变换上，对于无限维向量空间需要学生一定的了解。■

无限维向量空间的典型例子：域 F 上的一元多项式空间 $F[x]$ ，有典范的基： $1, x, x^2, x^3, \dots$ 。■

有限维空间，比如 n 维向量空间 V 上的线性变换 σ 可以通过 σ 在某个基下的矩阵唯一表达，因此这样的线性变换本质上可以看作是矩阵.但对于无限维向量空间 V 上的线性变换如何表达？■

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 4 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



为方便，我们假定 V 是可数无限维。因此可以将矩阵进行推广：记 $F^{\infty \times f}$ 表示列有限而行无限的域 F 上矩阵构成的集合，按照矩阵的通常运算，这也是一个 F -代数。注意 $F^{\infty \times f}$ 中元素有如下形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

其中对每一列向量 $(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{rn}, \cdots)'$ ，都存在一个 $m(n)$ 使得 $s > m$ 都有 $a_{sn} = a_{s+1,n} = \cdots = 0$ 。■

类似于有限维情景，作线性变换在 V 的一个可数无限个向量构成的有序基下的矩阵：比如： $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ 是 V 的一个有序基， V 的线性变换 σ 在该基下有如下关系：

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)A_\sigma$$

则 $A_\sigma \in F^{f \times \infty}$ 。 $\sigma \rightarrow A_\sigma$ 构成了 $\text{End}_F V$ 与 $F^{f \times \infty}$ 之间的同构对应。■

问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



问题提出

解决思路

例

问题再提出

对线性变换的特征值与特征向量仍然可以通过矩阵计算可得。■

定义 设 $A \in F^{\infty \times f}$, $\lambda \in F$ 称为 A 的特征值, 而非零向量 $X \in F^{\infty \times 1} = F^{\infty}$ 称为 A 的属于 λ 的特征向量, 如果有 $AX = \lambda X$ 成立.

Home Page

Title Page



Page 6 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2 解决思路

定理 设 $A \in F^{\infty \times f}$, 则 A 有特征值 λ 和属于 λ 的特征向量 X 的充分必要条件是存在自然数 n 使得对 A 和 X 的如下分块矩阵

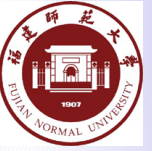
$$A = \begin{pmatrix} A_n & B \\ C & D \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

A_n 有特征值 λ , X_n 是 A_n 的属于 λ 的特征向量, $CX_n = 0$. 其中 A_n 是 F 上 n 阶方阵. ■

证明 “ \Leftarrow :” 对 $X = (X_n', 0)' \in F^\infty$, 则

$$AX = \begin{pmatrix} A_n X_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X_n \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda X$$

“ \Rightarrow :” 设 λ 是 A 的一个特征值, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)'$ 是属于 λ 的特征向量. 于是 $AX = \lambda X$. 对 $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 显然有 $A_n X_n = \lambda X_n, CX_n = 0$. ■



问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page

Navigation arrows

Navigation arrows

Page 8 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

3 例

例1. 设 $V = F[x]$, $1, x, x^2, x^3, \dots$ 是 V 的一个可数无限基. 令 $\sigma : V \rightarrow V$ 使得 $\sigma(x^i) = x^{i+1}, i = 0, 1, 2, \dots$. 则 σ 可扩张为 V 的线性变换. σ 在该基下的矩阵 $A =$

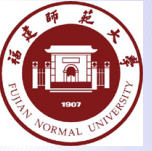
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

因此对任意一个自然数 n , $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 而 $C =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

所以不存在 A_n 的特征向量 X_n 使得 $CX_n = 0$. 故 σ 没有特征

值和特征向量.



例2. 设 $V = F[x]$, $1, x, x^2, x^3, \dots$ 是 V 的一个可数无限基. 令 $\sigma : V \rightarrow V$ 使得 $\sigma(x^i) = 1 + x + \dots + x^i, i = 0, 1, 2, \dots$. 则 σ 可扩张为 V 的线性变换. σ 在该基下的矩阵 $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

因此对任意一个自然数 n , $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 而 $C = 0$ 所以存在 A_n 的特征值 1 和属于 1 的特征向量 $X_n = k(1, 0, 0, \dots, 0)'$, $0 \neq k \in F$, 1 也是 σ 的唯一的特征值, F 中任意非零向量都是 σ 的属于 1 的特征向量.

问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit

4 问题再提出

定理表明, 对 A 的特征值 λ , 都存在一个 n 使得满足定理条件. 记 V_λ 是 A_n 的属于 λ 的特征子空间, W_0 是齐次线性方程组 $CX = 0$ 的解空间. 则 $V_\lambda \cap W_0 \neq 0$. 显然存在这样的最小者 n , 称此为 A 的特征值 λ 的特征指数. ■

推论 如果 n 是 A 的特征值 λ 的特征指数, 则对任意 $m \geq n$, λ 也是 A_m 的特征值. ■

问题: 对 A 的特征值 λ , 是否存在无限多个线性无关的特征向量? 显然是可能的, 比如 $A = I$ 是无限阶单位矩阵, 则 A 有特征值1, 并且有无限多个属于1的线性无关的特征向量. 但上面的例2表明, 也可能只存在有限个线性无关的属于 λ 的特征向量. 同样存在例子, 存在无限多个两两不同的特征值. 比如矩阵 $A = \text{diag}\{1, 2, 3, \dots\}$. 这些问题都是在有限维线性空间上所不具有的特性. ■

结论: 上面的问题留给本科学生许多想象, 从中可以找到许多研究性学习的课题.

References

- [1] 丘维声,高等代数(第二版)(上, 下), 高等教育出版社, 2003年.



问题提出

解决思路

例

问题再提出

Home Page

Title Page



Page 11 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit



问题提出

解决思路

例

问题再提出

欢迎指正!

Home Page

Title Page



Page 12 of 12

Go Back

Full Screen

Close

Quit