高等代数(线性代数)教学研讨

关于无限维向量空间上线性变换的特征值与特征向量问题

辛 林

福建师范大学数学与计算机科学学院

2009.5

一　问题提出

二　解决思路

三　例子

四　问题再提出

1 问题提出

作为本科高等代数教学，重点放在有限维向量空间及其相关的线性变换上，对于无限维向量空间需要学生一定的了解。

无限维向量空间的典型例子：域F上的一元多项式空间$F[x]$, 有典范的基：$1, x, x^2, x^3, \cdots$.

有限维空间，比如n维向量空间V上的线性变换σ可以通过σ在某个基下的矩阵唯一表达，因此这样的线性变换本质上可以看作是矩阵.但对于无限维向量空间V上的线性变换如何表达？

为方便，我们假定V是可数无限维。因此可以将矩阵进行推广：记$F^{\infty\times f}$表示列有限而行无限的域F上矩阵构成的集合，按照矩阵的通常运算，这也是一个F-代数。注意$F^{\infty\times f}$中元素有如下形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

其中对每一列向量$(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{rn}, \cdots)'$，都存在一个$m(n)$使得$s > m$都有$a_{sn} = a_{s+1,n} = \cdots = 0$.

类似于有限维情景，作线性变换在V的一个可数无限个向量构成的有序基下的矩阵：比如：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$是$V$的一个有序基，$V$的线性变换$\sigma$在该基下有如下关系：

$$\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)A_\sigma$$

则$A_\sigma \in F^{f\times\infty}$. $\sigma \to A_\sigma$构成了$\mathrm{End}_F V$与$F^{f\times\infty}$之间的同构对应.

对线性变换的特征值与特征向量仍然可以通过矩阵计算可得.

定义 设$A \in F^{\infty \times f}$, $\lambda \in F$称为A的特征值，而非零向量$X \in F^{\infty \times 1} = F^{\infty}$称为$A$的属于$\lambda$的特征向量，如果有$AX = \lambda X$成立.

2 解决思路

定理　设$A \in F^{\infty\times f}$, 则A有特征值λ和属于λ的特征向量X的充分必要条件是存在自然数n使得对A和X的如下分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_n & B \\ C & D \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

A_n有特征值λ, X_n是A_n的属于λ的特征向量, $CX_n = 0$. 其中A_n是F上n阶方阵.

证明 "$\Leftarrow$:" 对$X = (X_n', 0)' \in F^{\infty}$, 则

$$AX = \begin{pmatrix} A_nX_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X_n \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda X$$

"$\Rightarrow$:" 设λ是A的一个特征值，$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)'$是属于$\lambda$的特征向量. 于是$AX = \lambda X$. 对$X_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，显然有$A_nX_n = \lambda X_n, CX_n = 0$.

3 例

例1. 设$V = F[x]$, $1, x, x^2, x^3, \cdots$是V的一个可数无限基. 令$\sigma : V \to V$使得$\sigma(x^i) = x^{i+1}, i = 0, 1, 2, \cdots$. 则$\sigma$可扩张为$V$的线性变换. σ在该基下的矩阵$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

因此对任意一个自然数n, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 而$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$所以不存在$A_n$的特征向量$X_n$使得$CX_n = 0$. 故$\sigma$没有特征值和特征向量.

例2. 设$V=F[x]$, $1,x,x^2,x^3,\cdots$是V的一个可数无限基. 令$\sigma:V\to V$使得$\sigma(x^i)=1+x+\cdots+x^i, i=0,1,2,\cdots$. 则$\sigma$可扩张为$V$的线性变换. σ在该基下的矩阵$A=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

因此对任意一个自然数n, $A_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 而$C=0$ 所以存在A_n的特征值1和属于1的特征向量$X_n=k(1,0,0,\cdots,0)',0\neq k\in F$, 1也是$\sigma$的唯一的一个特征值，$F$中任意非零向量都是$\sigma$的属于1的特征向量.

4 问题再提出

定理表明，对A的特征值λ, 都存在一个n使得满足定理条件. 记V_λ是A_n的属于λ的特征子空间，W_0是齐次线性方程组$CX=0$的解空间. 则$V_\lambda \bigcap W_0 \neq 0$. 显然存在这样的最小者$n$，称此为$A$的特征值$\lambda$的特征指数.

推论 如果n是A的特征值λ的特征指数，则对任意$m \geq n$, λ也是A_m的特征值.

问题：对A的特征值λ, 是否存在无限多个线性无关的特征向量? 显然是可能的，比如$A=I$是无限阶单位矩阵，则A有特征值1,并且有无限多个属于1的线性无关的特征向量. 但上面的例2表明，也可能只存在有限个线性无关的属于λ的特征向量. 同样存在例子，存在无限多个两两不同的特征值.比如矩阵$A=\mathrm{diag}\{1,2,3,\cdots\}$. 这些问题都是在有限维线性空间上所不具有的特性.

结论：上面的问题留给本科学生许多想象，从中可以找到许多研究性学习的课题.

References

[1] 丘维声,高等代数(第二版)(上，下)，高等教育出版社，2003年.

欢迎指正!